Les 101 exercices qui figurent dans cette sélection constituent une base de sujets pour les élèves de seconde qui souhaitent approfondir leur travail personnel. Ils ont été choisis dans la maquette d'un recueil d'exercices en cours de préparation. Ce recueil d'exercices comportera d'une part des gammes d'entraînement aux gestes techniques abordés en cinquième, quatrième, troisième et seconde, de manière à consolider les bases jusqu'à les maîtriser avec une certaine virtuosité, et d'autre part des problèmes de recherche, de synthèse et d'approfondissement pour préserver le niveau d'exigence et ouvrir des perspectives sur des notions délaissés dans les programmes récents mais qui font la différence dans les filières scientifiques sélectives.

Les numéros des pages indiqués qui sont indiqués pour orienter le travail des élèves correspondent à celles du livre de cours de Jérôme ANDRIEUX, professeur au Collège Stanislas. Ce livre au format A4 couvre en 378 pages les programmes actuels et anciens des classes de cinquième, quatrième, troisième, seconde et même un peu plus. De multiples renvois internes, un index généreusement fournis et des tables détaillées permettent de relier les notions entre elles et facilitent le travail de fond, tant pour consolider les bases que pour replacer les notions abordées dans un contexte plus ambitieux que les programmes officiels actuels.

La commande peut se faire par correspondance, en utilisant le bon de commande téléchargeable sur la page d'accueil du site www.labossedesmaths.fr ou directement en ligne avec un règlement sécurisé via PayPal.
Le livre est aussi disponible à la Librairie Papeterie Stanislas, 8 rue Notre-Dame des champs 75006 PARIS.

Les professeurs qui souhaitent utiliser dans leurs sujets des exercices qui figurent sur cette sélection téléchargeable gratuitement peuvent le faire, ce fichier PDF est copiable au format texte et aucun filigrane ne vient charger les 27 pages d'exercices pour qu'ils puissent récupérer les formules et les figures au format image. En contrepartie ils sont priés de bien vouloir citer en référence le site www.labossedesmaths.fr

Exercice 1 Les nombres premiers inférieurs à 100 présentés dans un tableau.
Reprenons le principe du crible d'Eratosthène (Voir dans le livre de cours page 18) en écrivant les entiers naturels inférieurs à 100 dans un tableau de six colonnes au lieu de dix comme cela se fait le plus souvent. Les multiples de deux sont dans les colonnes 2, 4 et 6, les multiples de trois sont dans les colonnes 3 et 6. Rayons maintenant les multiples de 5 puis ceux de 7. Les nombres qui ne sont pas rayés sont les nombres premiers inférieurs à 100. On remarquera que tous sont du type 6k – 1 ou 6k + 1.

Exercice 2 Voir page 19.
Démontrer qu'un nombre qui s'écrit aaa (par exemple 777 ou 555) est divisible par 37.

Exercice 3 Voir page 20.
Calculer le PGCD de 26 015 et 11 495. Rendre la fraction $\frac{11495}{26015}$ irréductible, justifiez.

Exercice 4 Calculer

$$A=\frac{(-5)^3\times(-8)^3\times(-9)^2}{15^2\times12^4}\ ;\quad B=\frac{4\times10^2+3\times10}{4\times10+3}\ ;\quad C=\frac{12}{11\times\frac{5}{7}}\times\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-2}\ ;\quad D=\frac{3-\frac{4-\frac{3}{2}}{5}}{\frac{3}{4-\frac{1}{3}}}\ ;$$

$$E=\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}-\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2\ ;\quad F=\left[\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}+\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2-2\right]^2\ ;\ G=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ;$$

$$H=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}+\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}+\frac{\sqrt{2}}{2};\quad I=\left(1+\frac{1}{1+\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{2+\frac{\pi}{3}}\right);\quad J=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

Exercice 5

$$A=\prod_{p=1}^{p=100}\left[1-\frac{4}{(2p-1)^2}\right]=\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2p-1)^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{199^2}\right)$$

Le symbole $\prod_{p=1}^{p=100}$ signifie produit pour p variant de 1 à 100 de 1 en 1. Les facteurs du produit sont les expressions $1-\frac{4}{(2p-1)^2}$, qui dépendent de la variable p, contenues à l'intérieur du symbole $\prod_{p=1}^{p=100}$.
Le nombre p prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, …, 99 et 100, les 2p – 1 sont les cents premiers nombres impairs 1, 3, 5, …, 197 et 199.
Le nombre $1-\frac{4}{(2p-1)^2}$ est le $p^{\text{ième}}$ facteur de ce produit qui comporte 100 facteurs.
En remarquant qu'il s'agit d'une différence de deux carrés, simplifier l'expression de A.

Exercice 6 Nombres de Fibonacci et nombres de Lucas Voir page 83.

On considère les nombres de Fibonacci $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

et les nombres de Lucas $L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Vérifier que pour n = 0, 1, 2, 3 et 4 ces nombres sont des entiers.

Exercice 7 Peut-on faire confiance à sa calculatrice ? Voir page 47.

Comparer le résultat que donne la calculatrice pour $\sqrt{10^{24} - (10^{12} - 2 \times 10^{-12})^2}$ et la valeur approchée obtenue en développant manuellement le radicande $10^{24} - (10^{12} - 2 \times 10^{-12})^2$.

Exercice 8 On suppose que les nombres a, b, c et d sont tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Voir page 43.

Démontrer dans ce cas que : a/ $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ b/ $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ c/ $\frac{ad + bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad + bc}$

Exercice 9 Fractions continues, approximation de $\sqrt{5}$ et de $\sqrt{2}$. Voir page 68.

En remarquant que $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 1$

on trouve $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$ (1)

et en remplaçant à nouveau $\sqrt{5}$ par cette expression au dénominateur,

on obtient $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2+\left(2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}$ (2)

puis $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}$ (3)

puis $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}}$ (4)

… …

puis $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}} = \ldots = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}}}}}}$ (8)

À condition de négliger $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ devant 2 on peut successivement encadrer $\sqrt{5}$ de la manière suivante :

Etape 1

$$2 < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Etape 2

$$2 + \frac{4}{17} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} = 2 + \frac{17}{72}$$

Etape 3

$$2 + \frac{72}{305} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}}} = 2 + \frac{305}{1292}$$

Donner les encadrements de $\sqrt{5}$ aux étapes 4 et 5. Quelle est alors la précision atteinte ?

Faire de même pour encadrer $\sqrt{2}$ en partant de $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$.

Comparer cette méthode avec la méthode de Héron d'Alexandrie.

Exercice 10 On considère un nombre rationnel dont le développement décimal est périodique. L'objectif du problème est de mettre en œuvre une méthode pour retrouver une écriture fractionnaire de ce nombre.
a/ On considère le nombre $b = 0{,}2323\underline{23}\ldots$
Démontrer que $100 \times b = b + 23$. En déduire la fraction irréductible égale à b.
b/ Procéder de la même manière pour déterminer une fraction irréductible égale à $c = 0{,}218\underline{218}\ldots$
c/ De même pour $d = 3{,}427\underline{427}\ldots$ en remarquant que $3{,}427\underline{427}\ldots = 3 + 0{,}427\underline{427}\ldots$
d/ De même pour $e = 12{,}3456\underline{56}\ldots$ en remarquant que $12{,}3456\underline{56}\ldots = \frac{1}{100}\times(1234 + 0{,}56\underline{56}\ldots)$.
e/ Que peut-on dire du nombre $f = 0{,}99\underline{99}\ldots$?

Exercice 11
Réduire les expressions suivantes : Voir page 78.
$A = [(5x - 3y + 7) - (2x - 5y - 2)] + [-(4x + 3y + 1) + (3x - y - 3)]$
$B = [(2x - 3) - (3y + 5)] + [4x - 1 - (2y - 3)] - [5x + 2 - (4y - 1)]$
Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes : Voir page 80.
$C = (5x^2 - 3x)(2x + 4x^3)$ $\quad D = (3x + 5)(2x-3)(4x - 1)$ $\quad E = (3x^2 - 5x + 2)^2$ $\quad F = (2x^2 + x - 1)^3$
Vérifier les égalités suivantes
$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$ $\qquad (a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^6 - b^6$

Exercice 12 Factoriser, éventuellement en plusieurs étapes. Voir page 85.
$A = (3x - 9)(2x + 7) - (2x - 6)(4x - 14)$ $\qquad B = (10x + 25)(7x - 3) - (6x + 15)(x + 1)$
$C = (3x + 7)(x - 3) + 3x + 7$ $\qquad D = (2x - 7)(3x + 5) - 2x + 7$
$E = 4x - 3 + (5x - 1)(3 - 4x)$ $\qquad F = (2x + 3)^2 - 9(x + 1)^2 + 5x + 4$

Exercice 13 Simplifier lorsqu'elles existent les expressions suivantes :
$$A = \frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}} \; ; \qquad B = \frac{\frac{x+3}{1-3x} + \frac{x-3}{1+3x}}{1 - \frac{x^2-9}{1-9x^2}} \; ; \qquad C = \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{2x+1}{2x-1}}{\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+1}{2x-1}}.$$

Exercice 14 Ecrire les expressions suivantes sous forme canonique. Voir page 86.
$A = 2x^2 + 12x - 5$ $\qquad B = -7x^2 + 42x - 36$ $\qquad C = \sqrt{2}\,x^2 - 7\sqrt{2}\,x + \sqrt{18}$

Exercice 15 Résoudre les équations suivantes. Voir page 88.
a/ $(x - 3)(x + 4) - (x^2 + 9) = 0$ $\qquad$ b/ $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$ $\qquad$ c/ $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} = \frac{x+2}{2}$
d/ $x - 1 = \sqrt{2}(x+1)$ $\qquad$ e/ $4\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - \frac{3x+4}{5} = 0$ $\qquad$ f/ $\frac{x}{55} - \frac{3x-11}{66} + \frac{33-x}{44} = 0$

Exercice 16 Voir page 96.
Résoudre l'équation $\frac{x-1}{x-m} = m$ dans $\mathbb{R}$ et discuter selon la valeur du paramètre m.

Exercice 17 Soit l'équation d'inconnue x, de paramètre m :
a/ Résoudre l'équation $m^2(x - 1) + m(5 - x) - 2(x + 3) = 0$ pour $m = -1$, $m = 0$ et $m = 3$.
b/ Peut-on déterminer m pour que -3 soit solution de l'équation ? Cette solution est-elle alors unique ?
c/ Même question pour -1 puis pour 1.

Exercice 18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ Voir pages 85 et 93.
a/ $(x + 1)^3 - x - 1 = 0$
b/ $(x + 2)^2 - 3(x^2 - 4) - 2(5x + 10) = 0$
c/ $(x + 1)^3 - x - 1 = (x + 2)^2 - 3(x^2 - 4) - 2(5x + 10)$